Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2015.

Linearna algebra, pismeni ispit

1. Dat je skup $\mathcal{L} = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) : AX - XA = \mathbf{0}\}$ gdje je $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ vektorski potprostor prostora $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$, te mu nađite jednu bazu i odredite dimenziju. Nadalje, konstruisati bazu prostora $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R})$ čiji ni jedan vektor ne leži u $\mathcal{L}$. Odgovor obrazložite.

2. Neka je $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrica linearnog operatora $T : \mathcal{V}^3(0) \longrightarrow \mathcal{V}^3(0)$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ gdje je $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(a) Odredite $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$ i $T(\vec{c})$;

(b) Odredite vektor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in \mathcal{V}^3(0)$ takav da je $T(\vec{v}) = \vec{i} - \vec{j}$.

3. Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ (prostor svih polinoma s realnim koeficijentima stepena najviše 4) zadan je linearni operator D_a s

$$(D_a(p))(x) = \frac{p(x+a) - p(x)}{a}$$

Odredite jezgru i sliku od D_a.

4. Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Važno: Ovaj papir treba predati zajedno s rješenjima zadataka! Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka. Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije predavanja rješenja numerišite svaku stranicu brojem oblika: broj-stranice/broj-strana...

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Zadan je skup $\mathcal{L} = \{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid AX - XA = 0 \}$ gdje je $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dokazati da je $\mathcal{L}$ potprostor od $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu nađite jednu bazu i odredite dimenziju. Nadalje, konstruisati bazu prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ čiji ni jedan vektor ne leži u $\mathcal{L}$. Odgovor obrazložite.

Rj. Prisjetimo se: Za neprazan podskup $\mathcal{S}$ vektorskog prostora V kažemo da je vektorski potprostor akko vrijedi (A1) i (M1)

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}$ za svaki skalar α

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a \\ 2d & c \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

$$AX - XB = \begin{pmatrix} 2b-c & a-d \\ 2d-2a & c-2b \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ je neprazan npr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}$. Pokažimo da vrijedi (A1) i (M1)

Neka su A i B dvije proizvoljne matrice iz $\mathcal{L}$.

$$(A+B)X - X(A+B) = AX + BX - XA - XB = \underbrace{(AX - XA)}_{=0} + \underbrace{(BX - XB)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow A + B \in \mathcal{S} \Rightarrow$ vrijedi (A1).

S druge strane

$$(\alpha A)X - X(\alpha A) = \alpha\underbrace{(AX - XA)}_{=0} = 0 \Rightarrow \text{vrijedi (M1)}$$

$\mathcal{L}$ je vektorski potprostor prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Samo na trenutak umjesto prostora $\mathcal{L}$ posmatrajmo prostor $\mathcal{L}'$ definisan sa

$$\mathcal{L}' = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2b-c=0,\ a-d=0,\ 2d-2a=0,\ c-2b=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=G} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \ker(G)$$

KAKO? ZAŠTO? ŠTA ĆE NAM OVO?

Prema tome mnogo je jednostavnije naći bazu za $\mathcal{L}'$ i dobijeni rezultat iskoristiti i odrediti bazu za $\mathcal{L}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \underset{\dots}{\text{lagana vježba}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a-d=0 \\ b-\frac{1}{2}c=0 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 2s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Prema tome

$$\mathcal{L} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\dim(\mathcal{L}) = 1.$$

Posmatrajmo standardnu bazu prostora $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Primjetimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{X} - \underline{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{X} - \underline{X} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{X} - \underline{X} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{X} - \underline{X} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. ni jedan vektor iz $\mathcal{S}$ ne leži u $\mathcal{L}$.

(#) Neka je $T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ matrica linearnog operatora $T: V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ u bazi $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ gdje je $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

(a) Odredite $T(\vec{a})$, $T(\vec{b})$ i $T(\vec{c})$

(b) Odredite vektor $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in V^3(O)$ takav da je $T(\vec{v})=\vec{i}-\vec{j}$.

Rj.

Šta znači da je T matrica linearnog operatora u bazi $\mathcal{B}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$? To znači da

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [T(\vec{a})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{b})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{c})]_{\mathcal{B}}\\ |&|&|\end{pmatrix}$$

iz čega vidimo da je

$$[T(\vec{a})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad [T(\vec{b})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad [T(\vec{c})]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Napišimo vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kao kolona vektore

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ove koordinate su prikazane u standardnoj bazi

Za ovo što se traži u dijelu pod (a), $\overbrace{}^{\text{prvo treba da}}$ odredimo

$$[T(\vec{a})]_{\mathcal{S}},\quad [T(\vec{b})]_{\mathcal{S}}\quad i\quad [T(\vec{c})]_{\mathcal{S}}$$

gdje je $\mathcal{S}$ standardna baza $\mathcal{S}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

Primjetimo sljedeće teoreme

Promjena matrice koordinata

Neka je T linearni operator na V, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ dvije baze za V. Koordinatne matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ i $[T]_{\mathcal{B}'}$ su povezane na sljedeći način

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}'}P,$$

gdje je $P = [I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}$ u $\mathcal{B}'$.

Ekvivalentno

$$[T]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}}Q,$$

gdje je $Q = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}$ matrica za promjenu baze sa $\mathcal{B}'$ u $\mathcal{B}$.

U našem slučaju već su date dvije baze $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ i $\mathcal{S} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, i dato je $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa odredimo $[T]_{\mathcal{S}}$. Prema navedenoj teoremi

$$[T]_{\mathcal{S}} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}}Q \qquad \text{gdje je} \qquad Q = [I]_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$$

$$[I]_{\mathcal{S}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [\vec{i}]_{\mathcal{B}} & [\vec{j}]_{\mathcal{B}} & [\vec{k}]_{\mathcal{B}} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{i} = \vec{a}, \quad \vec{j} = -\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{k} = -\vec{b} + \vec{c}$$

Time je $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$[Q \mid I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \underset{\text{lagana vježba}}{\cdots} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{= [I \mid Q^{-1}]}$$

$$\Rightarrow \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sad imamo

$$[T]_\varphi = Q^{-1} [T]_{\mathcal{B}} Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ matrica operatora T u bazi φ

ZAŠTO SMO UOPŠTE ODREDILI $[T]_\varphi$?

Prisjetimo se

<u>Djelovanje operatora kao množenje matricom</u>

<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Za svaki $u \in \mathcal{U}$ djelovanje od T na u je dato sa</u>

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}}$$

Sad kad imamo $[T]_\varphi$ možemo odrediti $T(\vec{i})$, $T(\vec{j})$ i $T(\vec{k})$

$$[T(\vec{i})]_\varphi = [T]_\varphi [\vec{i}]_\varphi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [T(\vec{j})]_\varphi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [T(\vec{k})]_\varphi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$T(\vec{a}) = T(\vec{i}) = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$T(\vec{b}) = T(\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$T(\vec{c}) = T(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = \vec{i}$$

$$T(\vec{i}+\vec{j}) = T(\vec{i}) + T(\vec{j})$$

$$T(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = T(\vec{i}) + T(\vec{j}) + T(\vec{k})$$

(b)

$$[\vec{v}]_\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\,T(\vec{i}) + y\,T(\vec{j}) + z\,T(\vec{k}) \\ &= x(3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + y(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + z(-\vec{i} - \vec{j}) \\ &= (3x - y - z)\vec{i} + (2x - y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k} \qquad \ldots (*) \end{aligned}$$

Tražimo $\vec{v}$ tako da je $T(\vec{v}) = \vec{i} - \vec{j}$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 1 \\ 2x - y - z &= -1 \\ x - y \quad &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x = 2,\ y = 2,\ z = 3$$

Traženi vektor $\vec{v}$ je

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

(#) Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ (prostora svih polinoma s realnim koeficijentima stepena najviše 4) zadan je linearni operator D_a s

$$(D_a(p))(x) = \frac{p(x+a)-p(x)}{a}$$

Odredite jezgru i sliku od D_a.

Rj.

$$D_a : \mathbb{R}_4[x] \longrightarrow \mathbb{R}_4[x]$$

$$p(x) \longrightarrow \frac{1}{a}(p(x+a)-p(x)$$

$$\ker(D_a) = \{ p \in \mathbb{R}_n[x] \mid (D_a(p))(x) = 0 \}$$

Prema definiciji $\ker(D_a)$ su svi polinomi $p(x)$ za koje vrijedi

$$\frac{1}{a}(p(x+a)-p(x)) = 0 \quad / \cdot a \quad (a \neq 0)$$

$$p(x+a)-p(x) = 0$$

$$p(x) = p(x+a)$$

Jedan od načina za rješavanje ovog zadatka je sljedeći: Razvićemo polinome $p(x)$ i $p(x+a)$ preko njihovih koeficijenata, izjednačiti koeficijente koji stoje uz x^4, x^3, x^2, x i x^0 i posmatrati šta ćemo dobiti.

$$p(x) = p_4 x^4 + p_3 x^3 + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$$

$$p(x+a) = p_4 (x+a)^4 + p_3 (x+a)^3 + p_2 (x+a)^2 + p_1 (x+a) + p_0$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

x^4: $p_4 = p_4$

x^3: $p_3 = 3ap_4 + p_3 \Rightarrow 3ap_4 = 0 \Rightarrow p_4 = 0$

x^2: $p_2 = 6a^2p_4 + 3ap_3 + p_2 \overset{p_4=0}{\Rightarrow} 3ap_3 = 0 \Rightarrow p_3 = 0$

x: $p_1 = 4a^3p_4 + 3a^2p_3 + 2ap_2 + p_1 \Rightarrow 2ap_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0$

x^0: $p_0 = a^4p_4 + a^3p_3 + a^2p_2 + ap_1 + p_0 \Rightarrow ap_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$

Sad možemo zaključiti da je jezgro od $D_a(p)$ sačinjavaju svi polinomi stepena nula

$$\ker(D_a) = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(x) = c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

Sad primjetimo da je

$$\frac{1}{a}(p(x+a) - p(x)) = \frac{1}{a}\Big(\big(4ax^3 + \underline{6a^2x^2} + \underline{\underline{4a^3x}} + a^4\big)p_4$$
$$+ \big(\underline{3ax^2} + \underline{\underline{3a^2x}} + a^3\big)p_3 + \big(\underline{\underline{2ax}} + a^2\big)p_2 + p_1 a\Big)$$
$$= 4p_4x^3 + (6a^2p_4 + 3p_3)x^2 + (4a^2p_4 + 3ap_3 + 2p_2)x + (a^3p_4 + a^2p_3 + ap_2 + p_1)$$

i da vrijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^2 & 3a & 2 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4p_4 \\ 6ap_4 + 3p_3 \\ 4a^2p_4 + 3ap_3 + 2p_2 \\ a^3p_4 + a^2p_3 + ap_2 + p_1 \end{bmatrix}$$

Ako samo za trenutak umjesto prostora $\mathbb{R}_4[x]$ posmatramo prostor $\mathbb{R}^5$ (prostor svih kolona vektora sa pet redova), ako umjesto polinoma $p(x) = p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$ posmatramo vektor $\begin{pmatrix} p_4 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$, a umjesto polinoma $\frac{1}{a}(p(x+a) + p(x))$ posmatramo vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4p_4 \\ 6ap_4 + 3p_3 \\ 4a^2p_4 + 3ap_3 + 2p_2 \\ a^3p_4 + a^2p_3 + ap_2 + p_1 \end{pmatrix}$$

tada mnogo lakši način za rješavanje zadatka je da umjesto operatora posmatramo matricu M definisanu na sljedeći način

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^2 & 3a & 2 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ZAŠTO? ŠTA ĆE NAM M?)

Pa umjesto traženja $\operatorname{im}(D_a)$ sada je puno lakše odrediti $\operatorname{im}(M)$. Prisjetimo se da <u>osnovne kolone u A generišu $\operatorname{im}(A)$</u>.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6a & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^2 & 3a & 2 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v : 3}{\overset{II_v : 4}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^3 & 3a & 2 & 0 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} III_v + II_v \cdot (-2a) \\ \sim \\ IV_v + II_v \cdot (-4a^3) \\ V_v + II_v \cdot (-a^3) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots$$

čak iz ove matrice nije teško vidjeti da će osnovne kolone od M biti prve četiri kolone.

Prema tome

$$\operatorname{im}(D_a) = \operatorname{span}\{4x^3 + 6ax^2 + 4a^2x + a^3,\ 3x^2 + 3ax + a^2,\ 2x + a,\ 1\}$$

Napomena: Primijetimo da smo iz iste matrice M mogli pročitati i generatore za $\ker(D_a)$.

Isto tako primijetimo da je

$$\dim(\mathbb{R}^4[x]) = 5$$

$$\dim(\operatorname{im}(D_a)) = 4$$

$$\dim(\ker(D_a)) = 1$$

(#) Za matricu A odredite matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rj. Prisjetimo se:

Ako $n\times n$ matrica A sa elementima iz $\mathbb{R}$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ koje ne moraju biti različite, i ako ima svojstvene vektore $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ takve da je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linearno nezavisan skup, tada

$$P^{-1}AP = D$$

gdje su

$$P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \quad i \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pa da bi odredili matricu P prvo moramo odrediti svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti

$Av = \lambda v$

$(A - \lambda I)v = 0$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_r + III_r}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{III_k - II_k}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_k + II_k}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(1-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{1-\lambda-2} = \lambda(1-\lambda)(\lambda+1)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

$\lambda_1 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ \hline x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_1 je $v_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_2 je $v_2 = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda_3 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

Svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_3 je $\underline{v_3} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Prema tome tražena matrica P je

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lagana provjera pokazuje da je $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$